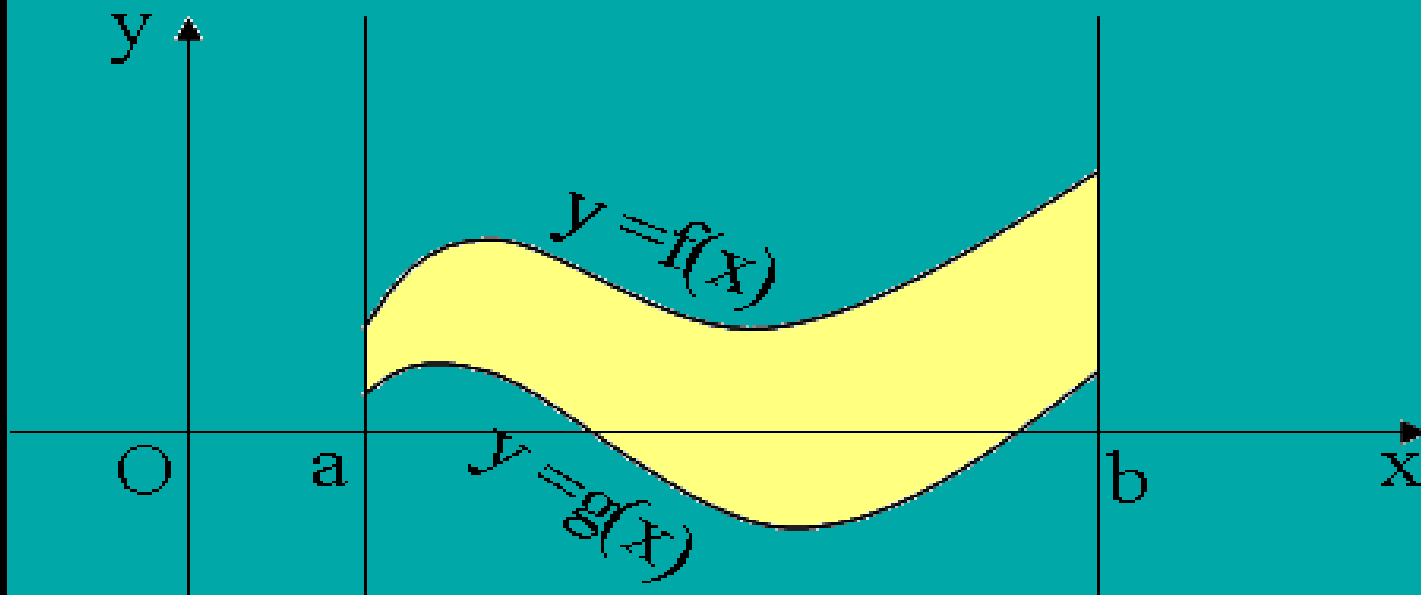


Bài 3

Ứng dụng tích phân để tính diện tích hình phẳng

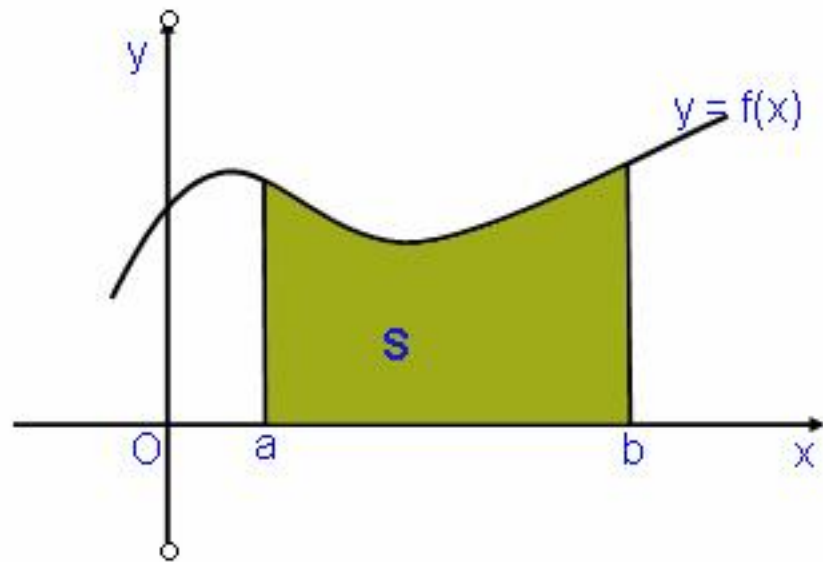


?1

Nhắc lại định lí về mối liên hệ giữa diện tích hình thang cong và tích phân?

Định lí: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, không âm trên đoạn $[a; b]$. Diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox , đường thẳng $x = a$, $x = b$ là:

$$S = \int_a^b f(x) dx$$



H1

Nhóm 1: Tính diện tích hình tròn bán kính R giới hạn bởi đường tròn có phương trình :
 $x^2 + y^2 = R^2$

Thực hiện các bài tập sau:

Nhóm 2: + Tính diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1, x = 2$.

+ Vẽ đồ thị hàm số $y = -x^2$ từ đó so sánh diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x^2$ trục hoành và hai đường thẳng $x = 1, x = 2$ với kết quả ở trên.

Nhóm 3: Tính diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 6$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1, x = 3$.

Nhóm 4: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 - 2x + 1$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1, x = 3$.

N1Lời giải

Xét đường tròn có phương trình: $x^2 + y^2 = R^2$

Diện tích hình tròn bán kính R là: $S = 4S'$

trong đó S' là diện tích hình phẳng giới hạn bởi: đồ thị hàm số

$y = \sqrt{R^2 - x^2}$ và hai đường thẳng $x = 0$ và $x = R$.

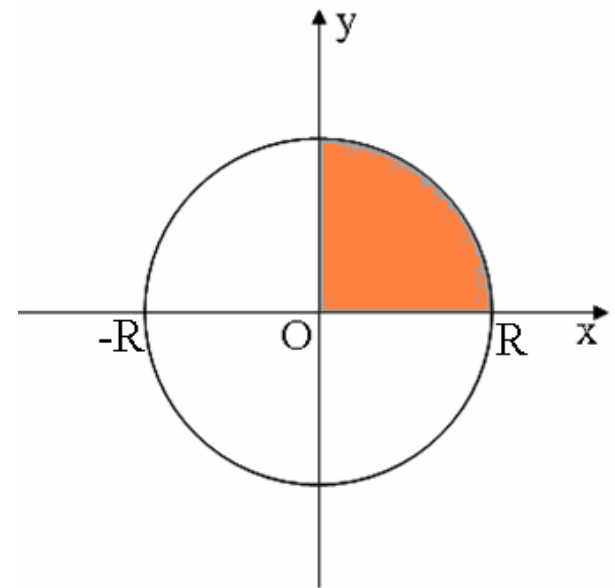
Ta có:

$$S' = \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx$$

Đặt $x = R \sin t$, $dx = R \cos t dt$.

$x = 0$ thì $t = 0$; $x = R$ thì $t = \pi/2$

$$\sqrt{R^2 - x^2} = \sqrt{R^2 - R^2 \sin^2 t} = R \cos t \quad (t \in [0; \frac{\pi}{2}])$$



$$S' = \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} R \cos t \cdot R \cos t dt = R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{R^2}{2} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi R^2}{4}$$

Vậy $S = 4S' = \pi R^2$

Quay lại...

N2

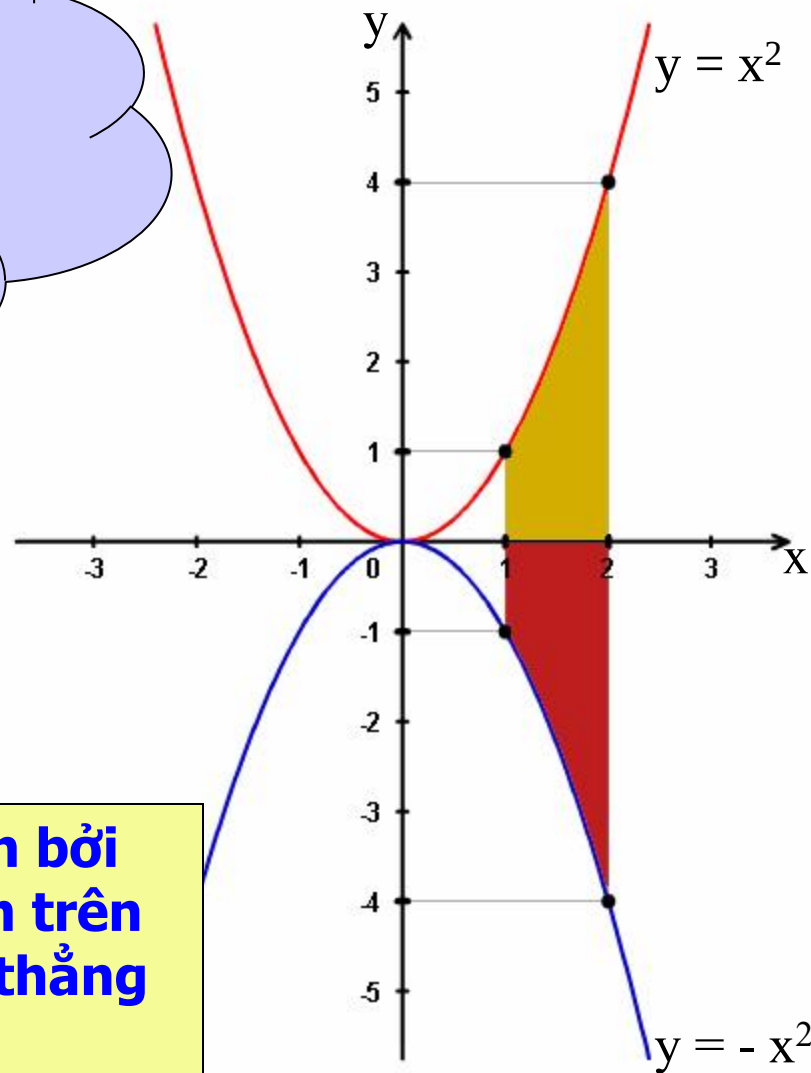
Vậy diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ liên tục, âm trên đoạn $[a;b]$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a, x = b$ là gì?

$$= \frac{7}{3}$$

+ Căn cứ vào hình vẽ nhận thấy:
Diện tích hình thang cong giới hạn

bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ liên tục, âm trên đoạn $[a;b]$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a, x = b$ là:

$$S = \int_a^b -f(x)dx$$

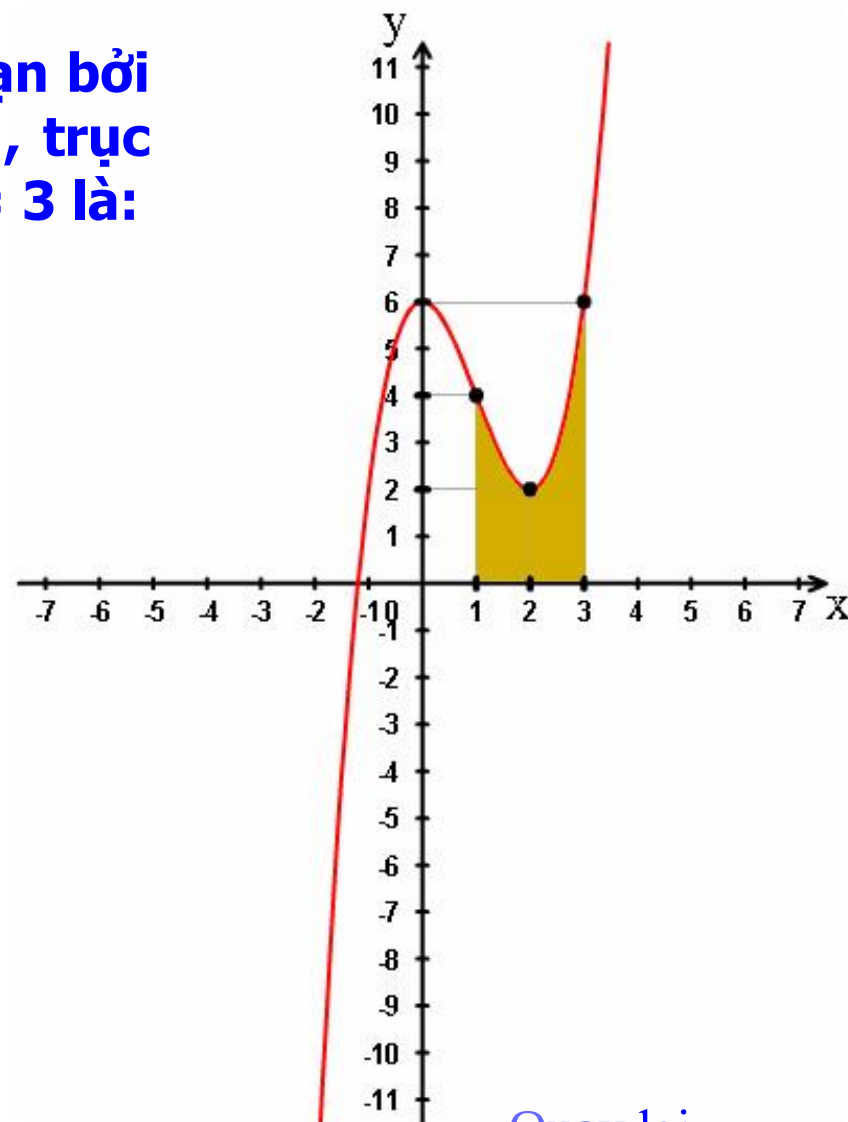


Tiếp tục...

N3

Diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 6$, trục Ox và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 3$ là:

$$\begin{aligned} S_3 &= \int_1^3 (x^3 - 3x^2 + 6) dx \\ &= \left(\frac{x^4}{4} - x^3 + 6x \right) \Big|_1^3 \\ &= \left(\frac{81}{4} - 27 + 18 \right) - \left(\frac{1}{4} - 1 + 6 \right) \\ &= 6 \end{aligned}$$

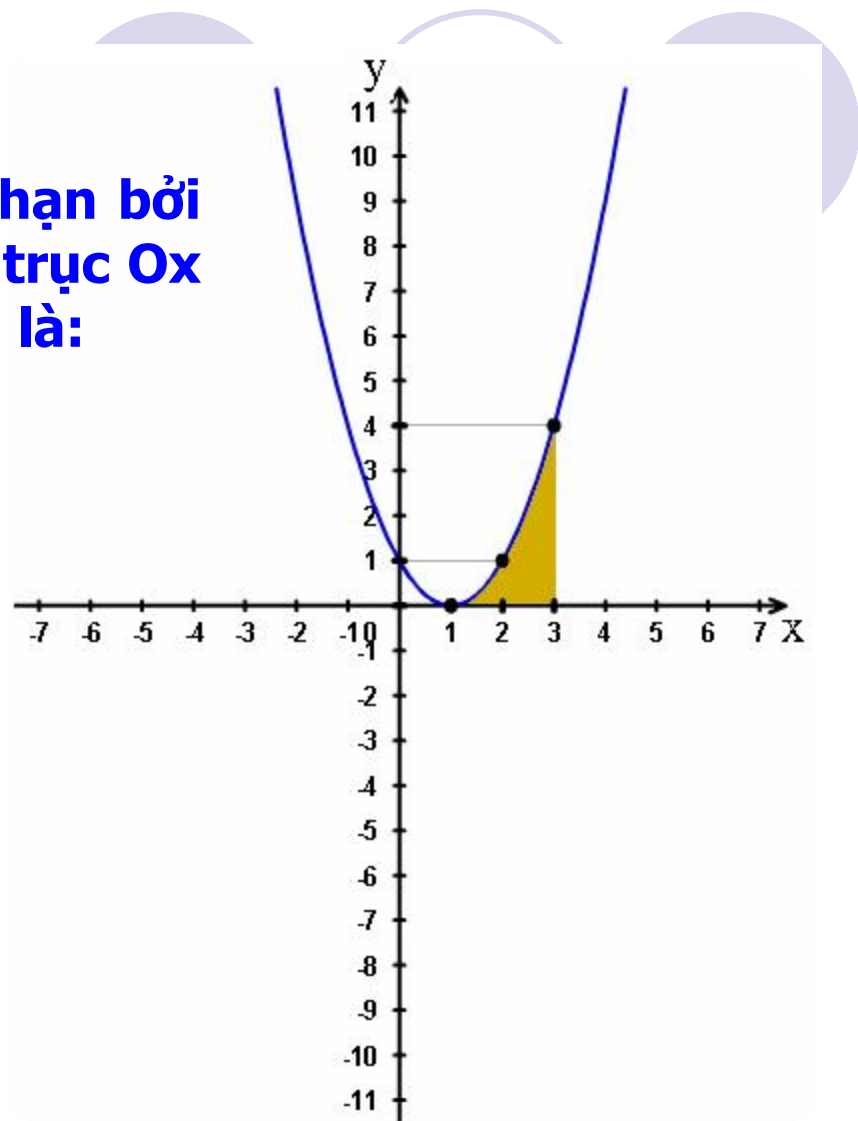


[Quay lại...](#)

N4

Diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 - 2x + 1$, trục Ox và hai đường thẳng $x = 1, x = 3$ là:

$$\begin{aligned} S_4 &= \int_1^3 (x^2 - 2x + 1) dx \\ &= \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + x \right) \Big|_1^3 \\ &= \left(\frac{27}{3} - 9 + 3 \right) - \left(\frac{1}{3} - 1 + 1 \right) \\ &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$



Quay lại...

Nhận xét

Từ kết quả của nhóm 3 và nhóm 4, tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số:

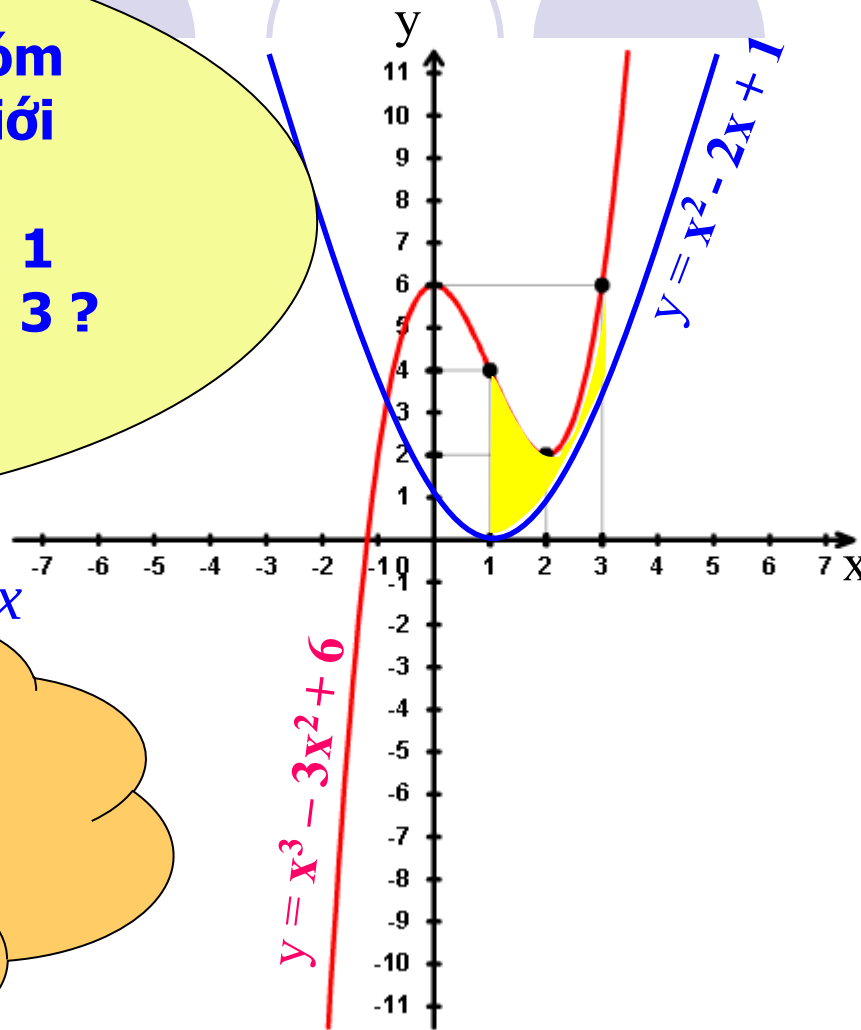
$y = x^3 - 3x^2 + 6$, $y = x^2 - 2x + 1$
và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 3$?

$$S = S_3$$

$$= \int_1^3 (x^3 - 3x^2 + 6) dx - \int_1^3 (x^2 - 2x + 1) dx$$

Vậy diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số

$y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ bằng?

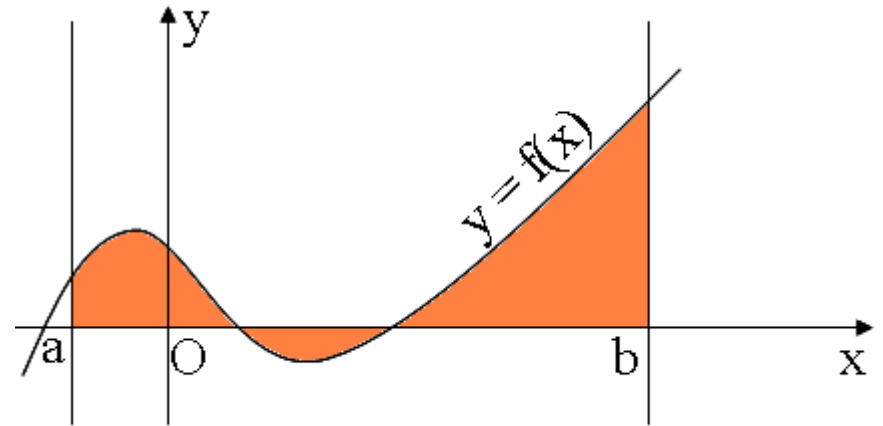


Tiếp tục...

1. Một số công thức cần nhớ

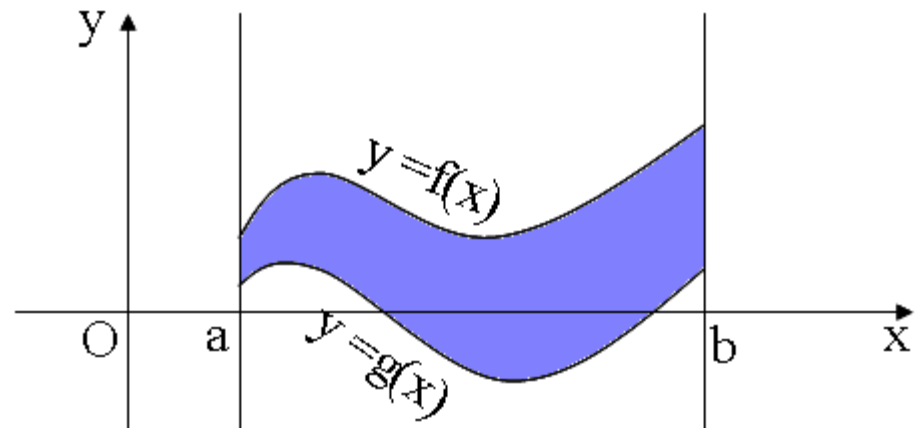
a) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ là:

$$S = \int_a^b |f(x)| dx$$



b) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và hai đường thẳng $x = a, x = b$

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$



Quay lại...

2. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số

$y = x^3 - 1$, trục tung, trục hoành và đường thẳng $x = 2$.

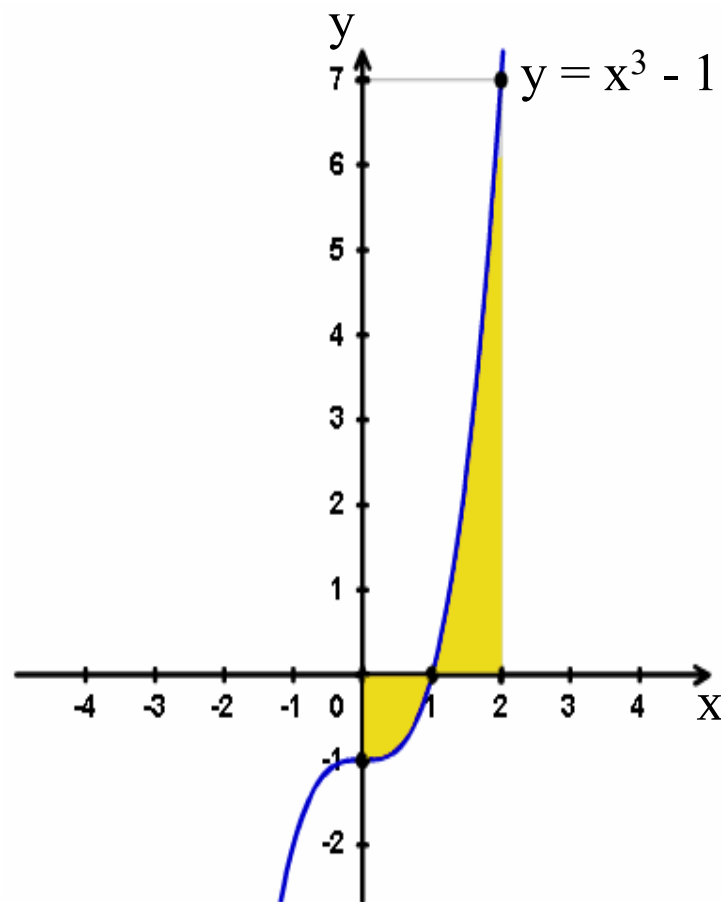
Lời giải:

Đặt $f(x) = x^3 - 1$.

Ta có: $f(x) \leq 0$ trên $[0;1]$ và $f(x) \geq 0$ trên $[1; 2]$

Diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 |x^3 - 1| dx \\ &= \int_0^1 (1 - x^3) dx + \int_1^2 (x^3 - 1) dx \\ &= \frac{3}{4} + \frac{11}{4} = \frac{7}{2} \end{aligned}$$



Ví dụ 2: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số: $f_1(x) = x^3 - 3x$ và $f_2(x) = x$

Lời giải:

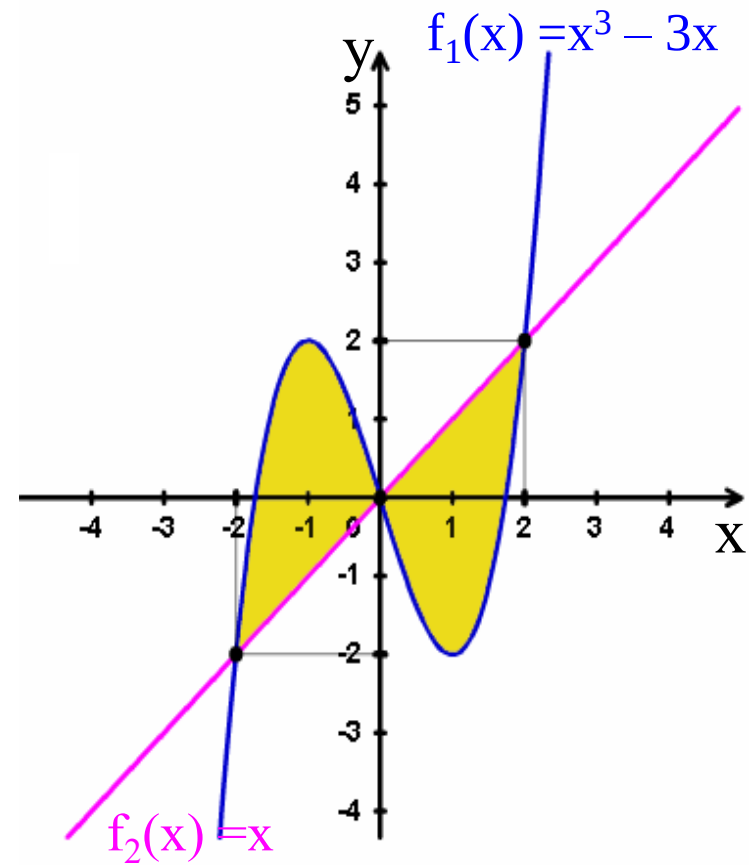
Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hai hàm số

$f_1(x) = x^3 - 3x$ và $f_2(x) = x$ là:

$$x^3 - 3x = x \Leftrightarrow x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^2 |x^3 - 4x| dx \\ &= \int_{-2}^0 (x^3 - 4x) dx + \int_0^2 (4x - x^3) dx \\ &= \left(\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right) \Big|_{-2}^0 + \left(2x^2 - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^2 \\ &= 4 + 4 = 8 \end{aligned}$$



3. Bài tập vận dụng

H1: Tìm diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 4 - x^2$, đường thẳng $x = 3$, trục tung và trục hoành.

Thực hiện H1 và

H2 trong sách

giáo khoa!

H2: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng $y = x + 2$ và Parabol $y = x^2 + x - 2$

H1:

Giải:

Đặt $f(x) = 4 - x^2$, $f(x) \geq 0$ trên $[0; 2]$ và $f(x) \leq 0$ trên $[2; 3]$ nên:

$$S = \int_0^3 |4 - x^2| dx = \int_0^2 (4 - x^2) dx + \int_2^3 (x^2 - 4) dx = \frac{23}{3}$$

H2:

Giải:

PT hoành độ giao điểm: $x^2 + x - 2 = x + 2 \Leftrightarrow x = -2; x = 2$. Vậy:

$$S = \int_{-2}^2 |4 - x^2| dx = \frac{32}{3}$$

Chú ý: + Để khử dấu giá trị tuyệt đối trong công thức:

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

Ta thực hiện như sau:

- Giải phương trình $f(x) - g(x) = 0$ trên đoạn $[a; b]$, giả sử pt có các nghiệm c, d ($a \leq c < d \leq b$).
- Trên từng đoạn $[a; c]$, $[c; d]$, $[d; b]$ thì $f(x) - g(x)$ không đổi dấu.
- Trên mỗi đoạn đó, chẳng hạn trên đoạn $[c; d]$, ta có:

$$S = \int_c^d |f(x) - g(x)| dx = \left| \int_c^d [f(x) - g(x)] dx \right|$$

Củng cố:

- Ghi nhớ các công thức tính diện tích hình phẳng.
- Bài tập đề nghị:

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số:

**$y = x^2 - 4x + 3$, $y = -2x + 2$
và $y = 2x - 6$.**

$$\begin{aligned} S &= \int_1^2 [x^2 - 4x + 3 - (-2x + 2)] dx \\ &+ \int_2^3 [x^2 - 4x + 3 - (2x - 6)] dx \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

